Kompilatorns första faser – automater och grammatik,
Sommar 2014

Moment 3: Övningar och examinerande uppgifter

Uppgift 1 (övning): Låt $\mathbb{Q}_+$ vara mängden av alla *positiva rationella tal*, dvs, $q \in \mathbb{Q}_+$ om och endast om det finns positiva heltal m och n så att

$$q = \frac{m}{n}.$$

Visa att $\mathbb{Q}_+$ är en uppräknelig mängd.

Uppgift 2 (examinerande, senast 2014-08-20): Hilberts Grand Hotel har oändligt många rum, numrerade $1, 2, 3, 4, \ldots$

Antag att hotellet är fullsatt och att det kommer oändligt många bussar, numrerade $1, 2, 3, 4, \ldots$. I varje buss finns oändligt många passagerare, som sitter på platser numrerade $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Hur ska receptionisten bete sig för att alla de nya gästerna ska få egna rum på hotellet?

Uppgift 3 (övning): Visa att mängden av alla ändliga strängar över alfabetet $\Sigma = \{0, 1\}$ är oändlig och uppräknelig.

Uppgift 4 (examinerande, senast 2014-08-20): Visa att mängden av alla program som går att skriva i språket C är oändlig och uppräknelig.

Uppgift 5 (övning): Visa att mängden av alla språk över $\{0, 1\}$ som definierar beräkningsproblem som inte har någon lösning i språket C inte är uppräknelig.

Uppgift 6 (övning): *Inklusionsproblemet för kontextfria grammatiker* är det följande: Givet två kontextfria grammatiker A och B, avgör om $L(A) \subseteq L(B)$.

Universalitetsproblemet för kontextfria grammatiker är det följande: Givet en kontextfri grammatik A med terminalalfabet T, avgör om A kan generera alla strängar över T, dvs om $L(A) = T^*$.

Beskriv en reduktion från universalitetsproblemet för kontextfria grammatiker till inklusionsproblemet för kontextfria grammatiker.

Uppgift 7 (examinerande, senast 2014-08-27): Beskriv en reduktion från haltproblemet till följande problem: Givet ett program skrivet i något programmeringsspråk, avgör om programmet terminerar oavsett vilket input det startas med.

Uppgift 8 (övning): Antag att $A \leq_m B$, dvs att A är reducerbart till B. Bevisa att $\overline{A} \leq_m \overline{B}$, där $\overline{A}$ är komplementet till A och $\overline{B}$ är komplementet till B.

Uppgift 9 (övning): Dominating Set är följande problem: Givet en oriktad graf $G = (V, E)$ och ett heltal k, avgör om det finns en delmängd $D \subseteq V$ sådan $|D| \leq k$ och varje nod i V antingen tillhör D eller delar en kant med en nod i D.

Bevisa att Dominating Set tillhör NP.

Uppgift 10 (examinerande, senast 2014-08-27): Vertex Cover är följande problem: Givet en oriktad graf $G = (V, E)$ och ett heltal k, avgör om det finns en delmängd $C \subseteq V$ sådan $|C| \leq k$ och för varje kant (u, v) i E tillhör antingen u eller v (eller båda) mängden C.

Bevisa att Vertex Cover tillhör NP.

Uppgift 11 (övning): Visa att Clique, Vertex Cover och Dominating Set är NP-fullständiga.

Uppgift 12 (examinerande, senast 2014-08-27): Hitting Set är följande problem. Givet en mängd S, en mängd $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$ av delmängder av S och ett heltal k, avgör om det finns en delmängd H av S sådan att $|H| \leq k$ och för alla $i \in \{1, \ldots, n\}$ finns minst ett element från H i mängden D_i, dvs $H \cap D_i \neq \emptyset$ för alla i.

Visa att Hitting Set är NP-fullständigt.