Bezierkurvor

Vackra Modellfunktioner

Tillämpning

- **Mycket vanligt inom grafiken**
- **CAD-system**

Där kurvornas utseende är viktigare än att precisa punkter skall satisfieras

Parameterkurvor

- **Kurvor som beskrivs**

$$r = r(t)$$

där

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- **En rät linje mellan** p_1 **och** p_2 **ges av**

$$r(t) = (1 - t)\,p_1 + tp_2 \qquad 0 \le t \le 1$$

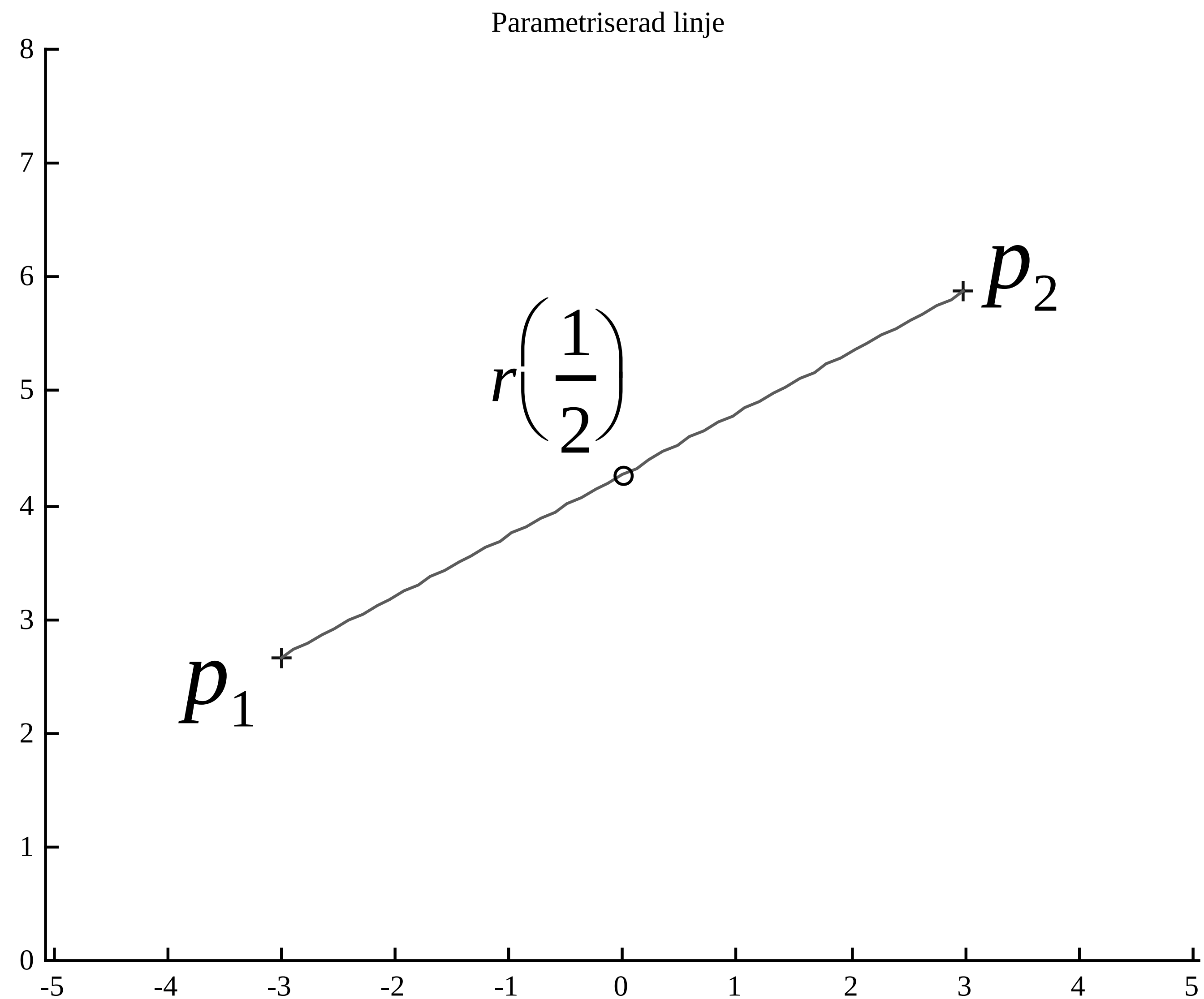
…parameterkurvor

Som i komponentform blir

$$x(t) = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t\left(x_2 - x_1\right)$$
$$y(t) = (1-t)y_1 + ty_2 = y_1 + t\left(y_2 - y_1\right)$$

Enkelt att generalisera till R^3 med ytterligare en komponent

Parametriserad linje



Kvadratiska Bézierkurvor

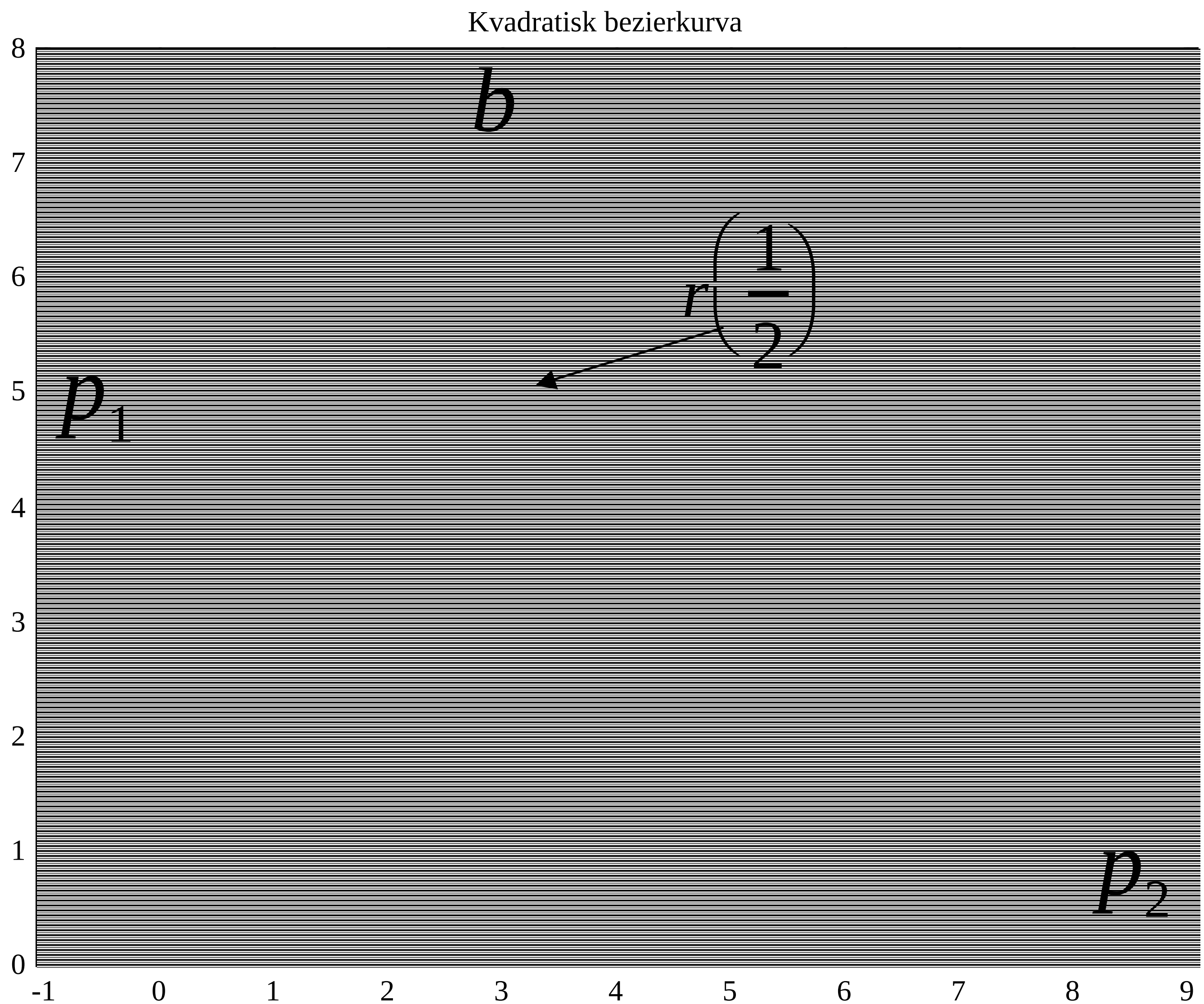
- **En kvadratisk kurva mellan** p_1 **och** p_2 **konstrueras av interpolationspunkterna** p_1 **och** p_2 **ytterligare en punkt** b

$$r(t) = (1-t)^2 p_1 + 2t(1-t)b + t^2 p_2 \quad 0 \le t \le 1$$

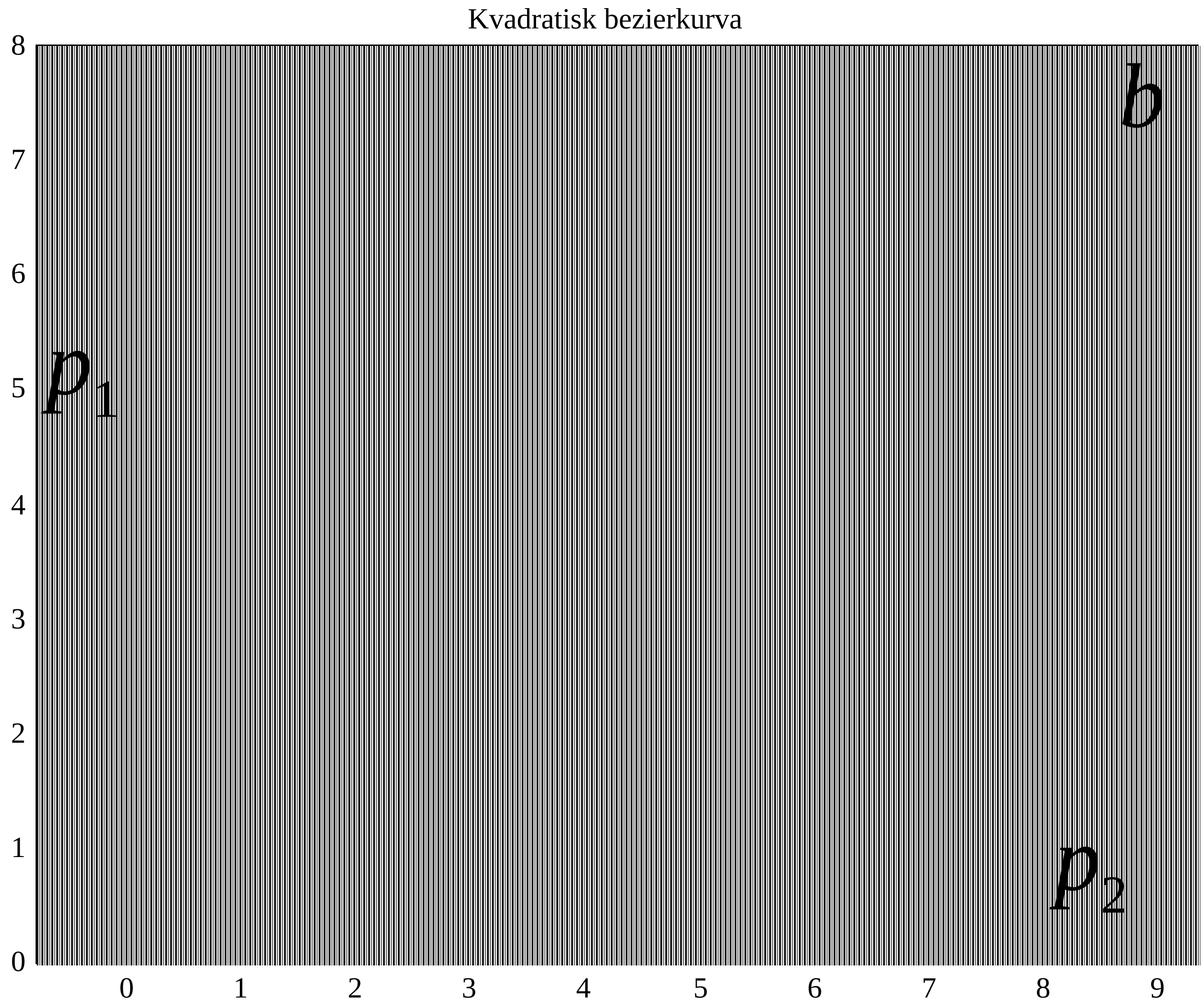
- $r\left(\frac{1}{2}\right)$ **och** $r'\left(\frac{1}{2}\right)$ **har geometrisk betydelse**

Bézierkurvor

En styrpunkt - kvadratisk



En annan kvadratisk



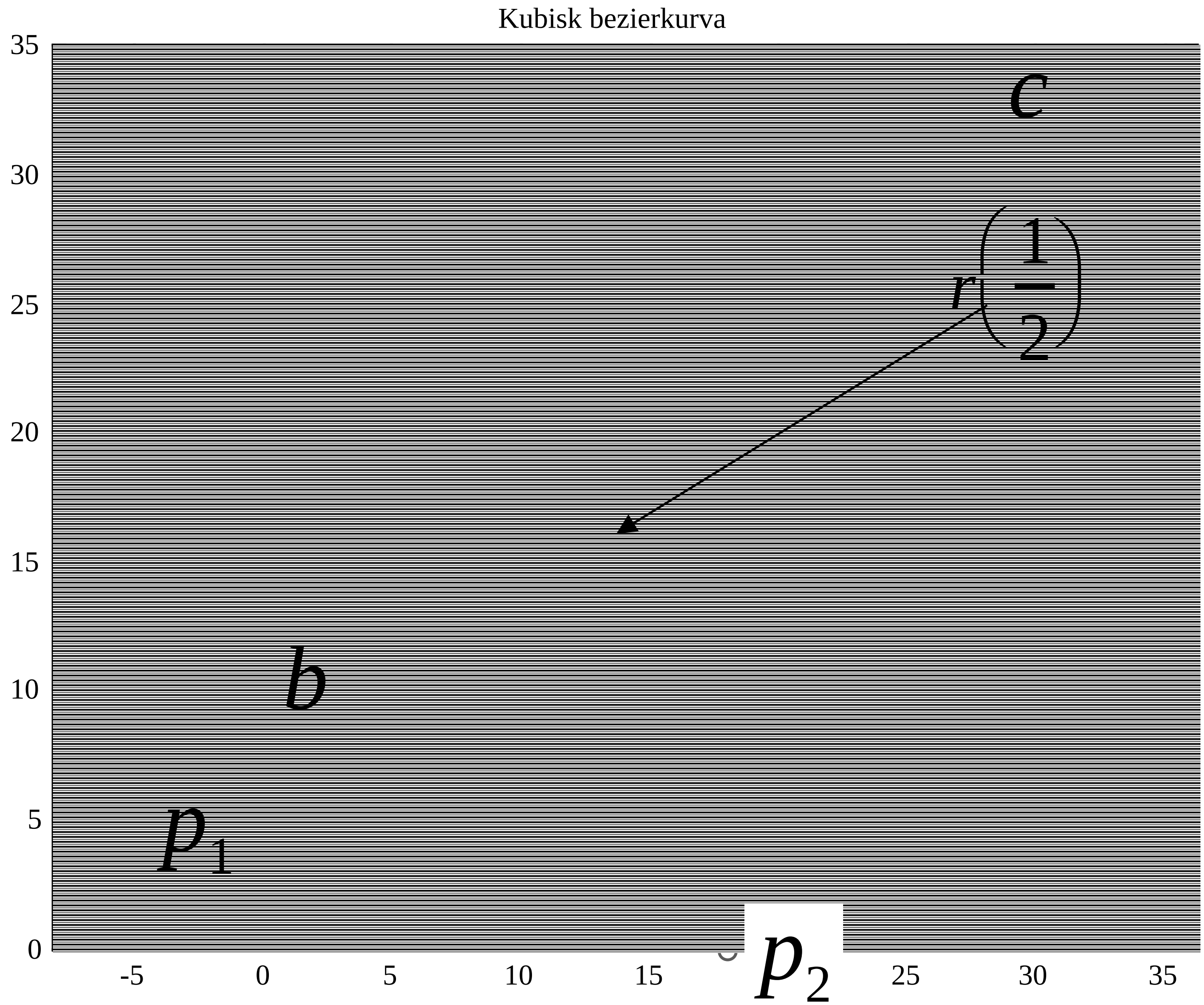
Bézierkurvor

Kubiska Bézierkurvor

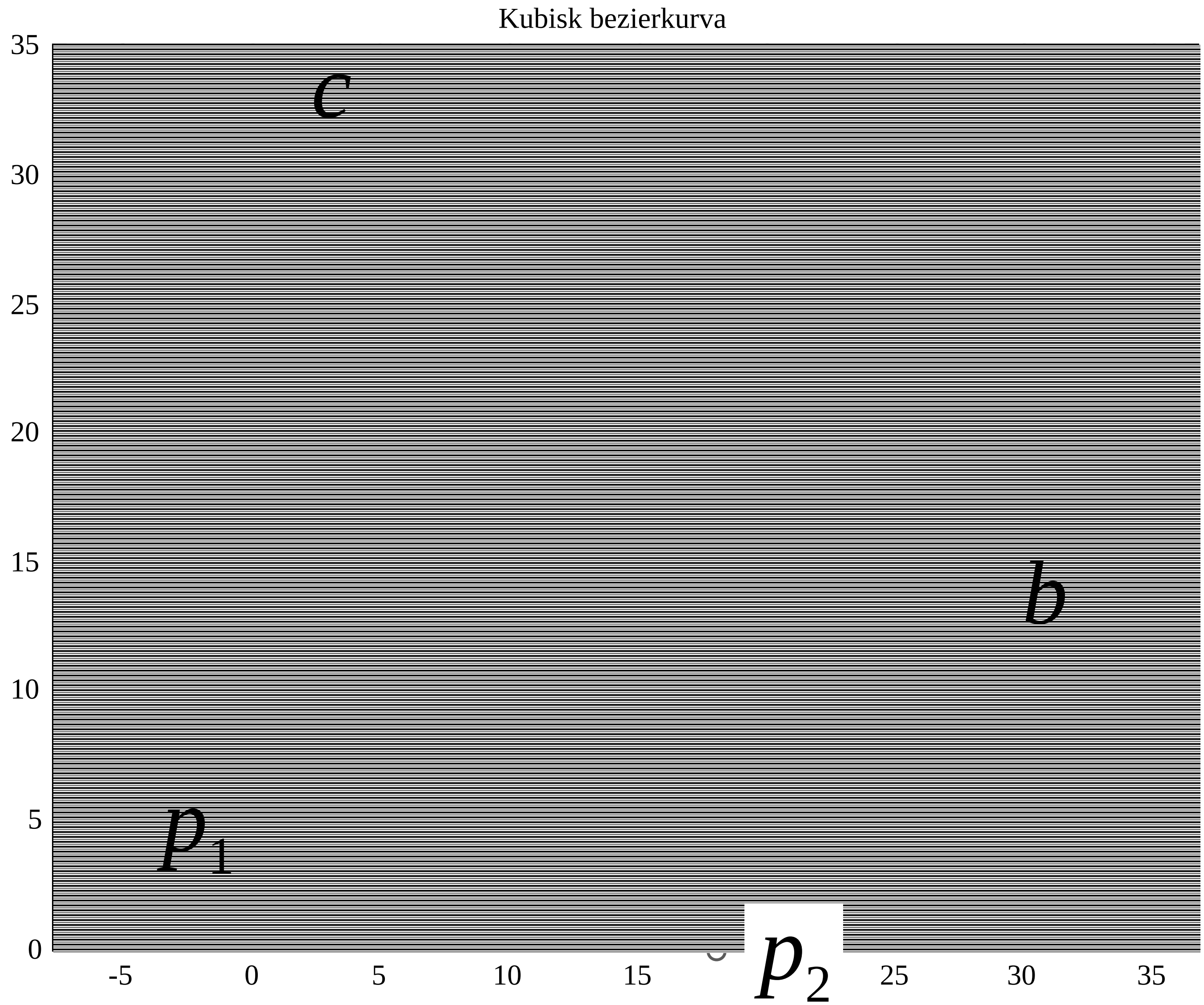
- **En kubisk kurva mellan** p_1 **och** p_2 **konstrueras av interpolationspunkterna** p_1 **och** p_2 **samt styrpunkterna** b **och** c

$$r(t) = (1-t)^3 p_1 + 3t(1-t)^2 b + 3t^2(1-t)c + t^3 p_2 \quad 0 \le t \le 1$$

Två styrpunkter - kubisk



Ytterligare en kubisk



Bestämma styrpunkterna

- **Givet ändriktningarna k_1 och k_2 så kan styrpunkterna b och c bestämmas med hjälp av p_1 , p_2 ,k_1 och k_2 ty**

$$b = p_1 + \alpha k_1$$
$$c = p_2 - \gamma k_2$$

…bestämma styrpunkterna…

- **Ur formeln fås :**

$$r\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1+3t\left(\frac{1}{2}\right)^2 b+3t^2\frac{1}{2}c+\left(\frac{1}{2}\right)^3 p_2=$$

$$=\frac{1}{8}p_1+3\frac{1}{2}\frac{1}{4}b+3\frac{1}{4}\frac{1}{2}c+\frac{1}{8}p_2=\frac{1}{4}\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{3}{4}\frac{b+c}{2}$$

sätt in b och c i uttrycket

$$r(\frac{1}{2})=\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{3}{8}\left(\alpha k_1-\gamma k_2\right)$$

…bestämma styrpunkterna

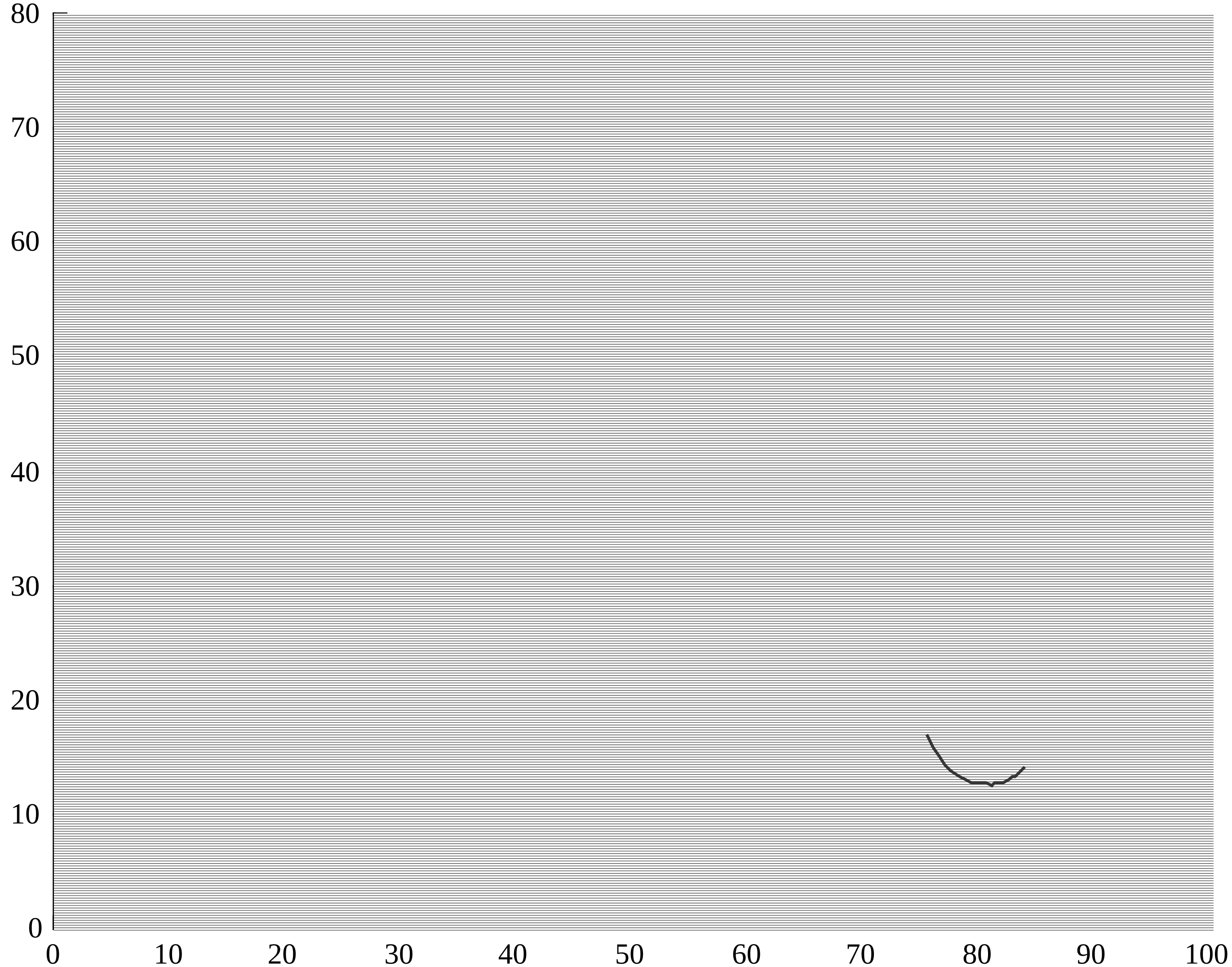
I uttrycket

$$r(\frac{1}{2}) = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{3}{8}\left(\alpha k_1 - \gamma k_2\right)$$

Kan man låta ev. krav på att $r\left(\frac{1}{2}\right)$ **skall passera genom en viss punkt avgöra** α **och** γ

Tumregel : välj dessa som $0.4\|p_2 - p_1\|_2$ **vilket ger en "lagom" buktad kurva.**

B-splines



```
% bsplejip, B-splines med ginput
 clear, clf
 t=(0:0.1:1)';
 F=[(1-t).^3  3*t.^3-6*t.^2+4  -3*t.^3+3*t.^2+3*t+1  t.^3]/6;
 axis([0 100 0 80]), hold on

 disp(['Klicka punkter (bryt med return)'])
 [x,y]=ginput(1); plot(x,y,'o'), p1=[x y];
 [x,y]=ginput(1); plotus(x,y,'o'), plotus([p1(1) x],[p1(2) y],'m:')

 p=[x y];  P=[p1; p1; p1; p];   % 2 kopior av p1 behövs
 r=F*P; plotus(r(:,1),r(:,2),'r-')

 for i=1:48                   % max 50 punkter
  [x,y,button]=ginput(1);
  if isempty(button), break
  else plotus(x,y,'o'), plotus([p(1) x],[p(2) y],'m:')
   p=[x y];  P=[P(2:4,:); p];    % utnyttja de fyra senaste
   r=F*P; plotus(r(:,1),r(:,2),'r-')
  end
 end
 for i=1:2                    % 2 kopior av slutpunkten
  P=[P(2:4,:); p]; r=F*P; plotus(r(:,1),r(:,2),'r-')
 end
```