Homogena koordinater i planet

En linje i planet $ax + by + c = 0$ representeras som $(a, b, c)^\top$.

En linje är en delmängd av punkter i planet.

Alla vektorer $(ka, kb, kc)^\top = k(a, b, c)^\top, k \neq 0$ representar samma linje som $(a, b, c)^\top$.

Två vektorer $k_1(a, b, c)$ och $k_2(a, b, c)$, $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, sägs vara *ekvivalenta*.

Ekvivalensklassen $k(a, b, c)$, $k \neq 0$ kallas *homogena* vektorer.

Vektorn $(0, 0, 0)^\top$ representerar ingen linje.

Mängden av homogena vektorer $\mathcal{R}^3 - (0, 0, 0)^\top$ bildar det *projektiva rummet* $\mathcal{P}^2$.

Homogena koordinater i planet

En punkt $\mathbf{x} = (x, y)^\top$ ligger på linjen $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ omm $ax + by + c = 0$.

Linjens ekvation kan skrivas som $(x, y, 1)(a, b, c)^\top = (x, y, 1)\mathbf{l} = 0$, där vektorn $(x, y, 1)$ motsvarar 2d-punkten (x, y).

Om $(x, y, 1)\mathbf{l} = 0$ och $k \neq 0$ så är $k(x, y, 1)\mathbf{l} = 0$.

Alla vektorer $(kx, ky, k), k \neq 0$ är homogena representanter av 2d-punkten (x, y).

En godtycklig homogen vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $x_3 \neq 0$, representerar punkten $(x_1/x_3, x_2/x_3)$ i $\mathcal{R}^2$.

En homogen vektor har 2 frihetsgrader, då den bestäms av 3 element men har godtycklig skala.

Linjer och punkter

En punkt $\mathbf{x}$ ligger på en linje $\mathbf{l}$ omm $\mathbf{x}^\top\mathbf{l} = 0$.

En linje $\mathbf{l}$ skär en punkt $\mathbf{x}$ omm $\mathbf{l}^\top\mathbf{x} = 0$.

En skärningspunkt $\mathbf{x}$ mellan två linjer $\mathbf{l}$ och $\mathbf{l}'$ uppfyller $\mathbf{x}^\top\mathbf{l} = 0$ och $\mathbf{x}^\top\mathbf{l}' = 0$, dvs $\mathbf{x}$ är ortogonal mot både $\mathbf{l}$ och $\mathbf{l}'$.

Ex. Linjerna $\mathbf{l} = (1, 1, -2)$ och $\mathbf{l}' = (1, 0, -1)^T$ har skärning $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ då $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{l}' = 0$.

På samma sätt uppfyller en linje $\mathbf{l}$ genom två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}'$ $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0$ och $\mathbf{l}^T\mathbf{x}' = 0$.

Ex. Punkterna $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ och $\mathbf{x}' = (2, 0, 1)^T$ genomskärs av linjen $\mathbf{l} = (1, 1, -2)^T$, $x + y - 2 = 0$ då $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0$ och $\mathbf{l}^T\mathbf{x}' = 0$.

Linjer och punkter

Låt $\mathtt{L} = [\mathbf{l}\ \mathbf{l}']$. Nollrummet $\mathcal{N}$ av $\mathtt{L}^\top$ definieras som $\mathcal{N}(\mathtt{L}^\top) = \{\mathbf{x} : \mathtt{L}^\top\mathbf{x} = 0\}$.

För $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in \mathcal{R}^3$ gäller det bl.a. för $\mathbf{v} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$, där *kryssprodukten* $\times$ definieras som

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}]_\times \mathbf{b},$$

där

$$[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pss är en linje genom punkterna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}'$

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'.$$

Skärningen mellan parallella linjer

Två parallella linjer $\mathbf{l} = (a, b, c)$ och $\mathbf{l}' = (a, b, c')$ skär varandra i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = (c' - c)(b, -a, 0)^\top$.

Punkten $(b, -a, 0)^\top$ saknar finit representation eftersom $(b/0, -a/0)^\top$ inte existerar. Det motsvarar tolkningen att två parallella linjer saknar skärning.

Om vi i stället studerar

$$\lim_{k \to 0} (b, -a, k)^\top$$

med inhomogen representation

$$\lim_{k \to 0} (b/k, -a/k)^\top$$

kan vi tolka vektorn $(b, -a, 0)^\top$ som oändligt långt borta i riktning $(b, -a)^\top$.

Oändlighetslinjen

Homogena vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ med $x_3 \neq 0$ motsvarar finita punkter i $\mathcal{R}^2$, eller "mängden av skärningar mellan icke-parallella linjepar".

Om vi utökar $\mathcal{R}^2$ med punkter med $x_3 = 0$ (men $(x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top$) får vi det projektiva rummet $\mathcal{P}^2$. Punkter med $x_3 = 0$ kallas *ideala* punkter eller punkter "i oändligheten".

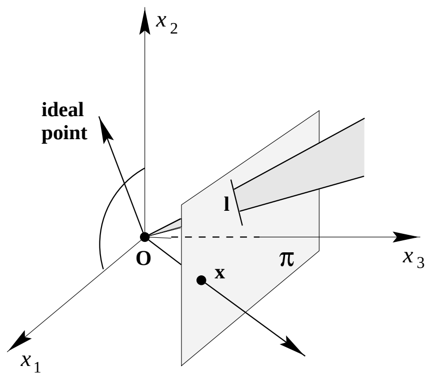
Alla ideala punkter $(x_1, x_2, 0)^\top$ ligger på *oändlighetslinjen* $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^\top$, ty $(x_1, x_2, 0)(0, 0, 1)^\top = 0$.

I det projektiva planet $\mathcal{P}^2$ skär två distinkta linjer varandra i exakt en punkt, oberoende av om de är parallella eller inte.

Geometrin i $\mathcal{P}^2$ kallas för *projektiv geometri*.

Tolkning av det projektiva planet

En användbar tolkning av $\mathcal{P}^2$ är som en mängd strålar i $\mathcal{R}^3$. En homogen vektor $k(x_1, x_2, x_3)^\top, k \neq 0$ motsvarar en stråle genom origo. Den inhomogena representationen fås i skärningen med planet $x_3 = 1$. Strålarna för ideala punkter ligger helt i planet $x_3 = 0$ och saknar skärning med planet $x_3 = 1$.



Dualitet

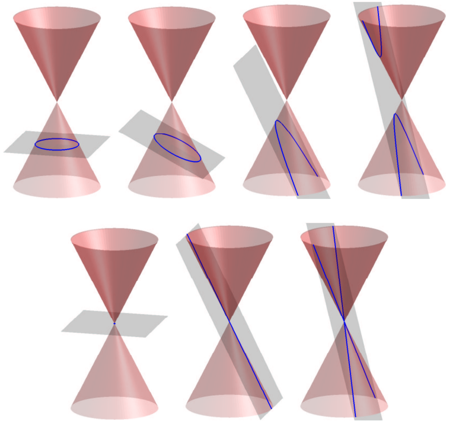
Eftersom $\mathbf{x}^\top \mathbf{l} = \mathbf{l}^\top \mathbf{x}$ kan betydelsen av punkter och linjer byta plats. Det betyder att för varje samband i $\mathcal{P}^2$ finns ett *dualt* samband där betydelsen av punkter och linjer bytt plats.

Ekvationen $\mathbf{x}^\top \mathbf{l} = 0$ kan alltså tolkas som att punkten $\mathbf{x}$ ligger på linjen $\mathbf{l}$, men också att punkten $\mathbf{l}$ ligger på linjen $\mathbf{x}$.

Ekvationerna $\mathbf{x}^\top \mathbf{l} = \mathbf{x}^\top \mathbf{l}' = 0$ kan tolkas som att punkten $\mathbf{x}$ ligger på linjerna $\mathbf{l}$ och $\mathbf{l}'$, men också att linjen $\mathbf{x}$ skär punkterna $\mathbf{l}$ och $\mathbf{l}'$.

Kägelsnitt

Ett *kägelsnitt* är en andragradskurva i planet och anges normalt vara av tre olika typer: ellips, parabel och hyperbel. Degenererade kägelsnitt består av en punkt samt en eller två linjer.



Kägelsnittsekvationen

Ekvationen för ett kägelsnitt i inhomogena koordinater är

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

I homogena koordinater $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$ blir den

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

eller i matrisform

$$\mathbf{x}^\top \mathtt{C}\mathbf{x} = 0,$$

där

$$\mathtt{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}.$$

Ett kägelsnitt har 5 frihetgrader då det bestäms av 6 parametrar men med godtycklig skala.

Fem punkter definierar ett kägelsnitt

Varje punkt ger en ekvation för koefficienterna, ty om kägelsnittet passerar genom (x_i, y_i, z_i) så

$$ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_iz_i + ey_iz_i + fz_i^2 = 0.$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{bmatrix} x_i^2 & x_iy_i & y_i^2 & x_iz_i & y_iz_i & z_i^2 \end{bmatrix} \mathbf{c} = 0,$$

där $\mathbf{c} = (a, b, c, d, e, f)^\top$ representerar kägelsnittet $\mathtt{C}$ som en 6-vektor.

Med 5 punkter får vi

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2z_2 & y_2z_2 & z_2^2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3z_3 & y_3z_3 & z_3^2 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4z_4 & y_4z_4 & z_4^2 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5z_5 & y_5z_5 & z_5^2 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathtt{X}\mathbf{c} = 0,$$

där $\mathbf{c}$ fås som en nollvektor till 5×6-matrisen $\mathtt{X}$.

Tangeringlinjer till kägelsnitt

Tangeringslinjen $\mathbf{l}$ till $\mathtt{C}$ i en punkt $\mathbf{x}$ på $\mathtt{C}$ ges av

$$\mathbf{l} = \mathtt{C}\mathbf{x}.$$

Exempel: Kägelsnittet $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$ eller

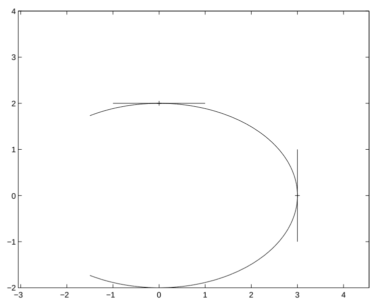
$$\mathtt{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

skär punkterna $\mathbf{x}_1 = (3, 0, 1)^\top$ och $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)^\top$. Tangeringslinjerna är

$$\mathbf{l}_1 = \mathtt{C}\mathbf{x}_1 = (1/3, 0, -1)^\top \text{ eller } x = 3,$$

resp.

$$\mathbf{l}_2 = \mathtt{C}\mathbf{x}_2 = (0, 1/2, -1)^\top \text{ eller } y = 2.$$

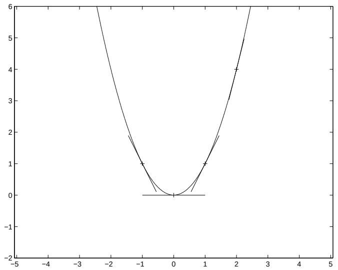


Fem punkter definierar ett kägelsnitt

Med punkterna
$\mathbf{x}_1 = (0,0,1), \mathbf{x}_2 = (-1,1,1), \mathbf{x}_3 = (1,1,1), \mathbf{x}_4 = (2,4,1), \mathbf{x}_5 = (0,1,0)$ blir

$\mathtt{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ med nollvektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och kägelsnitt $\mathtt{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

eller $x^2 - y = 0$.

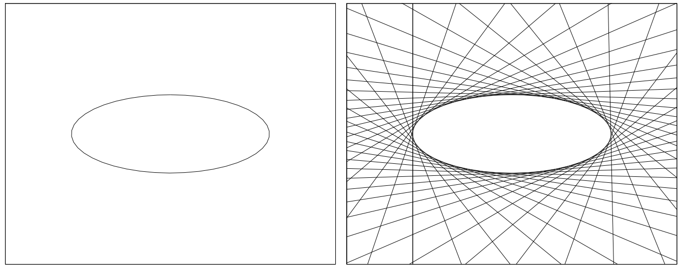


Duala kägelsnitt

Ekvationen $\mathbf{x}^\top \mathtt{C} \mathbf{x} = 0$ definierar en delmängd av punkter i $\mathcal{P}^2$ och kägelsnittet $\mathtt{C}$ kan därför också kallas för *punktkägelsnitt*. På motsvarande sätt finns en andragradsekvation för linjer. Ett linjekägelsnitt (dualt kägelsnitt) betecknas $\mathtt{C}^*$, där $\mathtt{C}^*$ är den *adjungerade* matrisen till $\mathtt{C}$ och ekvationen

$$\mathbf{l}^\top \mathtt{C}^* \mathbf{l} = 0$$

definierar delmängden av alla linjer i $\mathcal{P}^2$ som *tangerar* punktkägelsnittet $\mathtt{C}$.



$\mathbf{x}^\top \mathtt{C} \mathbf{x} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{l}^\top \mathtt{C}^* \mathbf{l} = 0$

Duala kägelsnitt

Om $\mathtt{C}$ symmetrisk med full rang är $\mathtt{C}^{-1} = \mathtt{C}^*$ så när som på skala. Det innebär att alla punkter $\mathbf{x}$ på $\mathtt{C}$ har entydiga tangenter $\mathbf{l} = \mathtt{C}\mathbf{x}$ men också att alla tangenter $\mathbf{l}$ har entydiga tangeringspunkter $\mathbf{x} = \mathtt{C}^{-1}\mathbf{l}$. Då motsvarar punktkägelsnittet $\mathbf{x}^\top \mathtt{C} \mathbf{x} = 0$ linjekägelsnittet

$$0 = \mathbf{x}^\top \mathtt{C} \mathbf{x} = (\mathtt{C}^{-1}\mathbf{l})^\top \mathtt{C} (\mathtt{C}^{-1}\mathbf{l}) = \mathbf{l}^\top \mathtt{C}^{-1} \mathbf{l} = 0.$$

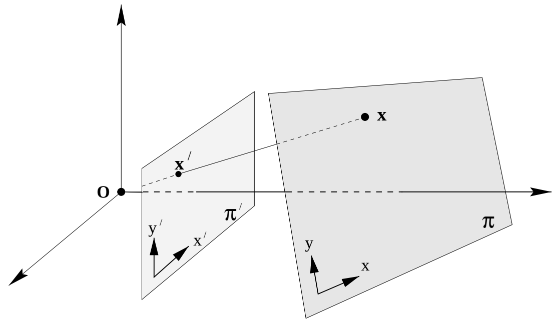
Om matrisen $\mathtt{C}$ ej har full rang kallas kägelsnittet *degenererat*. Degenererade punktkägelsnitt inkluderar två linjer (rang 2) samt en linje (rang 1). Ex: Punktkägelsnittet $\mathtt{C} = \mathbf{l}\mathbf{m}^\top + \mathbf{m}\mathbf{l}^\top$ består av linjerna $\mathbf{l}$ och $\mathbf{m}$. Nollvektorn $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{m}$ som ligger på både $\mathbf{l}$ och $\mathbf{m}$ saknar entydig tangent.

Degenererade linjekägelsnitt inkluderar två punkter (rang 2) och en punkt (rang 1). Ex: Linjekägelsnittet $\mathtt{C}^* = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top + \mathbf{y}\mathbf{x}^\top$ har rang 2 och består av linjer som skär punkten $\mathbf{x}$ och/eller $\mathbf{y}$. Alla linjer har entydiga tangeringspunkter utom $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

Projektiva transformationer

Definition: En *projektivitet* (eller *projektiv transformation* eller *homografi*) är en inverterbar avbildning h från $\mathcal{P}^2$ till sig själv så att tre punkter $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$ ligger på samma linje omm $h(\mathbf{x}_1)$, $h(\mathbf{x}_2)$ och $h(\mathbf{x}_3)$ också gör det.

Alltså: Linjer avbildas på linjer.



Inverterbar avbildning $\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$.

Alla projektiva transformationer av homogena punkter $\mathbf{x}$ går att skriva som $\mathbf{x}' = h(\mathbf{x}) = \mathtt{H}\mathbf{x}$, där $\mathtt{H}$ är en icke-singulär 3×3-matris.

Matrisen $\mathtt{H}$ har 8 frihetsgrader (9 element men godtycklig skala).

Rektifiering av perspektivbild av ett plan

Om koordinaterna för fyra punkter $\mathbf{x}_i$ samt dess avbildningar $\mathbf{x}'_i$ i bilden är kända går det att beräkna homografin $\mathtt{H}$. För varje punktpar $\mathbf{x} = (x, y)$ och $\mathbf{x}' = (x', y')$ gäller följande:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$
$$y' = \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

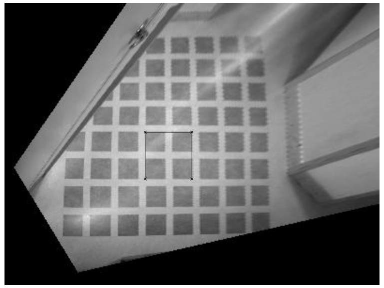
eller

$$x'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{11}x + h_{12}y + h_{13}$$
$$y'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{21}x + h_{22}y + h_{23},$$

vilket är linjära ekvationer i h_{ij}. 4 punkter leder till 8 ekvationer, vilket räcker för att entydigt beräkna $\mathtt{H}$, förutsatt att punkterna ligger i “standardläge”, dvs. inga 3 punkter är kolinjära.

Givet $\mathtt{H}$ så appliceras $\mathtt{H}^{-1}$ på hela bilden för att upphäva effekten av perspektivtransformationen.

Rektifiering av perspektivbild av ett plan



drawhomoline.m

```
function h=drawhomoline(L,varargin)
%DRAWHOMOLINE Draw homogenous line.
%
%h=drawhomoline(L[,line attributes])
%L - matrix with homogenous lines in each column.
%h - graphic handles.

% v1.0  2002-03-24. Niclas Borlin, niclas@cs.umu.se.

% Get axes scaling.
ax=axis;
xlim=ax(1:2);
ylim=ax(3:4);

% Construct lines for each side of the axis.
axL=[1,1,0,0;
     0,0,1,1;
     -xlim,-ylim];

h=zeros(size(L,2),1);
for i=1:size(L,2)
    l=L(:,i);
    % Determine if line is more vertical or
    % horizontal.
    if (abs(l(1))<abs(l(2)))
        % More horizontal. Calculate intersection to
        % left/right sides.
        x1=normhomo(lines2pt(l,axL(:,1)));
        x2=normhomo(lines2pt(l,axL(:,2)));
    else
        % More vertical. Calculate intersection to
        % upper/lower sides.
        x1=normhomo(lines2pt(l,axL(:,3)));
        x2=normhomo(lines2pt(l,axL(:,4)));
    end
    h(i)=line([x1(1),x2(1)],[x1(2),x2(2)],varargin{:});
end
```


normhomo.m och lines2pt.m

```
function X=homonorm(X)
%HOMONORM Normalize homogenous points.
%
%X=homonorm(X);

% v1.0  2002-03-19. Niclas Borlin, niclas@cs.umu.se.

[m,n]=size(X);

X=X./X(end*ones(1,m),:);

function x=lines2pt(l1,l2)
%LINES2PT Find homogenous intersection of two homogenous lines.
%
%x=lines2pt(l1,l2)
%l1,l2 - lines in homogenous coordinates.
%x     - intersection in homogenous coordinates.

% v1.0  2002-03-19. Niclas Borlin, niclas@cs.umu.se.

x=null([l1,l2]');
```

Transformationer av linjer och kägelsnitt

Studera en punkthomografi $\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$. Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ ligger på samma linje $\mathbf{l}$ så kommer $\mathbf{x}_1'$ och $\mathbf{x}_2'$ att ligga på samma linje $\mathbf{l}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l}$ eftersom

$$\mathbf{l}'^{\top}\mathbf{x}_i' = (\mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l})^{\top}\mathbf{x}_i' = \mathbf{l}^{\top}\mathtt{H}^{-1}\mathtt{H}\mathbf{x}_i = \mathbf{l}^{\top}\mathbf{x}_i = 0.$$

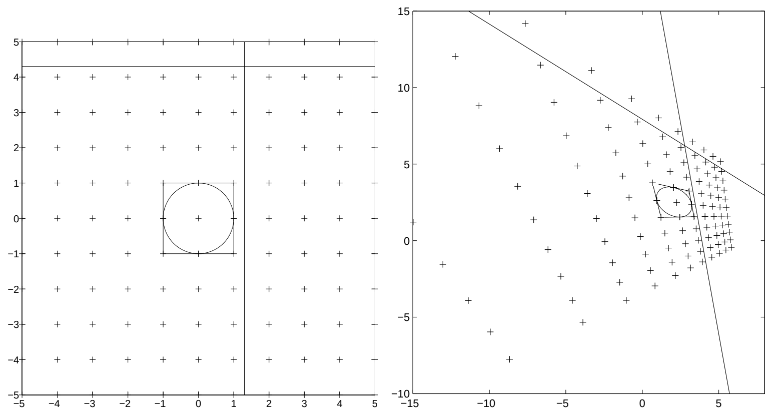
Under samma punkttransformation $\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$ avbildas ett kägelsnitt $\mathtt{C}$ på $\mathtt{C}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathtt{C}\mathtt{H}^{-1}$, ty

$$\mathbf{x}^{\top}\mathtt{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}'^{\top}\left(\mathtt{H}^{-1}\right)^{\top}\mathtt{C}\mathtt{H}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{\top}\underbrace{\mathtt{H}^{-\top}\mathtt{C}\mathtt{H}^{-1}}_{\mathtt{C}'}\mathbf{x}'.$$

Ett linjekägelsnitt $\mathtt{C}^*$ avbildas på $\mathtt{C}^{*\prime} = \mathtt{H}\mathtt{C}^*\mathtt{H}^{\top}$, ty

$$\mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}^*\mathbf{l} = (\mathtt{H}^{\top}\mathbf{l}')^{\top}\mathtt{C}^*(\mathtt{H}^{\top}\mathbf{l}') = \mathbf{l}'^{\top}\underbrace{\mathtt{H}\mathtt{C}^*\mathtt{H}^{\top}}_{\mathtt{C}^{*\prime}}\mathbf{l}'.$$

Transformationer av punkter, linjer och kägelsnitt



$\mathbf{x}, \mathbf{l}, \mathtt{C}$

$\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}, \mathbf{l}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l},$
$\mathtt{C}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathtt{C}\mathtt{H}^{-1}$

Linjekägelsnitt och vinklar

Linjekägelsnitten behövs för att beskriva vinklar mellan linjer i projektiv geometri. I Euklidisk geometri beräknas vinkeln mellan två linjer från den inre produkten mellan deras normaler. T.ex. om $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)^{\top}$ och $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^{\top}$ med normaler $(l_1, l_2)^{\top}$ resp. $(m_1, m_2)^{\top}$, så bestäms vinkeln θ mellan linjerna av

$$\cos\theta = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)(m_1^2 + m_2^2)}}.$$

Motsvarande väldefinierade uttryck i projektiv geometri är

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{m}}{\sqrt{(\mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{l})(\mathbf{m}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{m})}}, \text{ där } \mathtt{C}_{\infty}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Speciellt gäller att $\mathbf{l}$ och $\mathbf{m}$ är ortogonala om $\mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{m} = 0$.

Linjekägelsnitt och vinklar

Uttrycket $\mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{m} = 0$ är invariant under en homogen transformation $\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$, ty $\mathbf{l}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l}$ och $\mathtt{C}_{\infty}^{*\prime} = \mathtt{H}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathtt{H}^{\top}$ innebär att

$$\mathbf{l}'^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^{*\prime}\mathbf{m}' = (\mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l})^{\top}\mathtt{H}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathtt{H}^{\top}\mathtt{H}^{-\top}\mathbf{m} = \mathbf{l}^{\top}\mathtt{H}^{-1}\mathtt{H}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathtt{H}^{\top}\mathtt{H}^{-\top}\mathbf{m} = \mathbf{l}^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^*\mathbf{m}.$$

Det betyder att om vi känner projektionen $\mathtt{C}_{\infty}^{*\prime}$ av $\mathtt{C}_{\infty}^*$ i bilden kan vi avgöra om två linjer $\mathbf{l}'$ och $\mathbf{m}'$ i bilden är ortogonala genom att beräkna $\mathbf{l}'^{\top}\mathtt{C}_{\infty}^{*\prime}\mathbf{m}'$.

Transformationshierarki för $\mathcal{P}^2$

Homografierna går att beskriva som en hierarki av olika mycket specialiserade delgrupper.

Klass I: Isometrier.
Isometrier är transformation av planet $\mathcal{R}^2$ som bevarar det Euklidiska avståndet

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \epsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

där $\epsilon = \pm 1$. Om $\epsilon = +1$ bevarar transformationen orienteringen och är en *Euklidisk transformation* som enbart består av rotation och translation. Om $\epsilon = -1$ är innehåller transformationen en spegling.
En isometri kan skrivas som

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_{\mathtt{E}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

där $\mathtt{R}$ är en ortogonal 2×2-matris, $\mathbf{t}$ är en 2-vektor.

En isometri har 3 frihetsgrader; rotation (1) och translation (2).

Invarianter: längder, vinklar och areor.

Klass II: Similaritetstransformationer

En similaritetstransformation (similaritet) är en isometri plus isotropisk skalning. För orienteringsbevarande isometrier har en similaritet matrisformen

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_{\mathtt{S}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

där skalären s representerar skalningen.

En similaritet har 4 frihetsgrader; rotation (1), translation (2) och skalning (1).

Invarianter: vinklar, parallellitet, längdkvoter, areakvoter, “form”.

En similaritet kallas också för en *metrisk* transformation.

Klass III: Affina transformationer

En affin transformation (affinitet) är en icke-singulär transformation följt av en translation och representeras

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_{\mathtt{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

där $\mathtt{A}$ är en icke-singulär 2×2-matris.

En affinitet har 6 frihetsgrader; elementen i $\mathtt{A}$ och $\mathbf{t}$.

Invarianter: parallellitet, längdkvoter för parallella linjer, areakvoter.

Tolkning av affin transformation

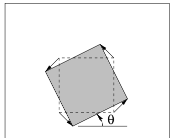
Om vi delar upp transformationsmatrisen $\mathtt{A}$ i

$$\mathtt{A} = \mathtt{R}(\theta)\mathtt{R}(-\phi)\mathtt{D}\mathtt{R}(\phi),$$

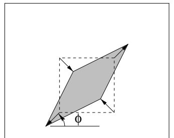
där $\mathtt{R}(\theta)$ och $\mathtt{R}(\phi)$ är rotationsmatriser och $\mathtt{D}$ är en diagonalmatris

$$\mathtt{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

så kan transformationen $\mathtt{A}$ tolkas som en sekvens av rotationer och anisotropisk skalning.



rotation



deformation

Det innebär att de två extra frihetsgraderna kan tolkas som skalningen λ_1/λ_2 samt “anisotropivinkeln” ϕ.
Denna faktorisering kan vi alltid få från singulära-värdesfaktoriseringen (SVD)

$$\begin{aligned} \mathtt{A} &= \mathtt{U}\mathtt{D}\mathtt{V}^\top = (\mathtt{U}\mathtt{V}^\top)(\mathtt{V}\mathtt{D}\mathtt{V}^\top) \\ &= \mathtt{R}(\theta)(\mathtt{R}(-\phi)\mathtt{D}\mathtt{R}(\phi)). \end{aligned}$$

Klass IV: Projektiva transformationer

En projektiv transformation är en generell linjär avbildning av homogena koordinater och betecknas

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_\mathtt{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

där $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$ och v är en skalär.

En projektivitet har 8 frihetsgrader; 9 element i $\mathtt{H}_\mathtt{P}$ men godtycklig skala.

Invarianter: Korskvoter av linjelängder.

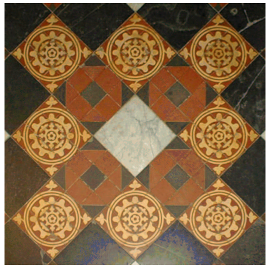
Den viktigaste skillnaden mellan projektivitet och affinitet är vektorn $\mathbf{v}$ och dess effekt på avbildningen av punkter på oändlighetslinjen. Studera avbildningarna av en ideal punkt $(x_1, x_2, 0)^\top$:

$$\begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix}.$$

För en affinitet $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ avbildas alla oändlighetspunkter på oändlighetspunkter. För en projektivitet avbildas vissa oändlighetspunkter på finita punkter.

Effekterna av olika transformationer

Similär



Affin

Projektiv

Uppdelning av en projektiv transformation

En projektiv transformation kan delas upp i en sekvens av transformationer på olika nivå i hierarkin:

$$\mathtt{H} = \mathtt{H}_\mathtt{S}\mathtt{H}_\mathtt{A}\mathtt{H}_\mathtt{P} = \begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} & v\mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix},$$

där $\mathtt{A} = s\mathtt{R}\mathtt{K} + \mathbf{t}\mathbf{v}^\top$ är en icke-singulär matris och $\mathtt{K}$ är en övertriangulär matris med $|\mathtt{K}| = 1$.

Uppdelningen är giltig om $v \neq 0$ och är unik om s väljs positiv.

Eftersom $\mathtt{H}^{-1} = \mathtt{H}_\mathtt{P}^{-1}\mathtt{H}_\mathtt{A}^{-1}\mathtt{H}_\mathtt{S}^{-1}$ och $\mathtt{H}_\mathtt{P}^{-1}$, $\mathtt{H}_\mathtt{A}^{-1}$, $\mathtt{H}_\mathtt{P}^{-1}$ är också projektiva, affina, respektive similära går det att faktorisera “från andra hållet”, dvs. det existerar också en faktorisering

$$\mathtt{H} = \mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A}\mathtt{H}_\mathtt{S} = \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

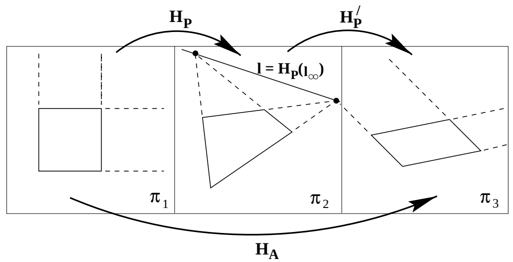
med andra värden på $\mathtt{K}$, $\mathtt{R}$, $\mathbf{t}$ och $\mathbf{v}$.

Rekonstruktion av affina egenskaper

En affin transformation avbildar oändlighetslinjen på sig själv, ty

$$\mathbf{l}'_\infty = \mathtt{H}_\mathtt{A}^{-\top}\mathbf{l}_\infty = \begin{bmatrix} \mathtt{A}^{-\top} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}^\top\mathtt{A}^{-\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{l}_\infty.$$

Om vi identiferat projektionen $\mathbf{l}'_\infty$ av $\mathbf{l}_\infty$ i en projektiv avbildning av ett plan kan vi göra affina mätningar. Exempelvis ska parallella linjer i planet skära varandra på $\mathbf{l}'_\infty$.



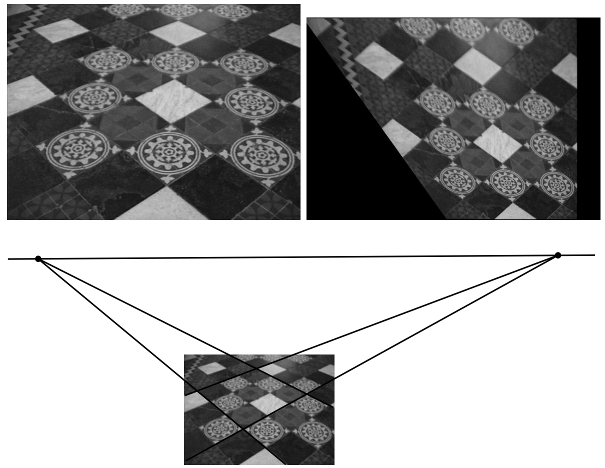
Affin rektifiering

Vi kan också transformera bilden så att $\mathbf{l}'_\infty$ transformeras tillbaka på $\mathbf{l}_\infty$. Om $\mathbf{l}'_\infty$ är linjen $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)^\top$, så kan vi (om $l_3 \neq 0$) konstruera följande transformation

$$\mathtt{H} = \mathtt{H}_\mathtt{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix},$$

där $\mathtt{H}_\mathtt{A}$ är en godtycklig affin transformation. Om vi applicerar $\mathtt{H}$ på bilden kommer oändlighetslinjen att få sin kanoniska position, ty

$$\mathtt{H}^{-\top}(l_1, l_2, l_3)^\top = (0, 0, 1)^\top = \mathbf{l}_\infty.$$



De cirkulära punkterna och deras dual

Det finns två punkter på $\mathbf{l}_\infty$ som avbildas på sig själva under alla similaritetstransformationer. De kallas för *cirkulära* eller *absoluta* punkter och betecknas

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Under en orienteringsbevarande similaritet:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \mathtt{H}_\mathtt{S}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s\cos\theta - si\sin\theta \\ s\sin\theta + si\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} (\cos\theta - i\sin\theta)\cdot 1 \\ (\cos\theta - i\sin\theta)\cdot i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= se^{-i\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

De cirkulära punkterna

De cirkulära punkterna är skärningspunkterna för en cirkel och oändlighetslinjen, ty ekvationen för en cirkel har $a = c$ och $b = 0$

$$ax_1^2 + ax_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

och skär $\mathbf{l}_\infty$ där $x_3 = 0$ eller

$$a(x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

som har lösning $\mathbf{I} = (1, i, 0)^\top$ och $\mathbf{J} = (1, -i, 0)^\top$.

Eftersom $\mathbf{I}$ och $\mathbf{J}$ ligger på alla cirklar räcker det med tre ytterligare punkter för att entydigt bestämma en cirkels ekvation, något som redan är känt i Euklidisk geometri.

Beräkning av cirkels ekvation

Vilken ekvation har cirkeln som skär punkterna $\mathbf{x}_1 = (0,0,1)^\top$, $\mathbf{x}_2 = (1,0,1)^\top$ och $\mathbf{x}_3 = (1,1,1)$?

Om vi lägger till de cirkulära punkterna ger fempunktsalgoritmen matrisen

$$\mathtt{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med nollrummet

$$\mathbf{c} = [1, 0, 1, -1, -1, 0]^\top$$

och kägelsnittet

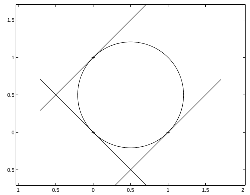
$$\mathtt{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

vilket motsvarar

$$x^2 + y^2 - x - y = 0$$

eller

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$



Det duala kägelsnittet till de cirkulära punkterna

Linjekägelsnittet $\mathtt{C}^*_\infty = \mathbf{IJ}^\top + \mathbf{JI}^\top$ är dualt med de cirkulära punkterna.

I Euklidiska koordinater ges det av

$$\mathtt{C}^*_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} [1 \; -i \; 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} [1 \; i \; 0] = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}.$$

Kägelsnittet $\mathtt{C}^*_\infty$ är invariant under en similaritetstransformation $\mathbf{x}' = \mathtt{H}_\mathtt{S}\mathbf{x}$, ty

$$\begin{aligned} \mathtt{C}^{*\prime}_\infty &= \mathtt{H}_\mathtt{S}\mathtt{C}^*_\infty\mathtt{H}_\mathtt{S}^\top = \begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathtt{R}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^\top & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathtt{R}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} = s^2 \begin{bmatrix} \mathtt{RR}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} = \mathtt{C}^*_\infty. \end{aligned}$$

Kägelsnittet $\mathtt{C}^*_\infty$ har 4 frihetsgrader (symmetrisk 3×3-matris, men godtycklig skala och $|\mathtt{C}^*_\infty| = 0$).

Informationsinnehållet i $\mathtt{C}^*_\infty$

Studera linjekägelsnittet $\mathtt{C}^*_\infty$ under en projektiv transformation:

$$\begin{aligned} \mathtt{C}^{*\prime}_\infty &= (\mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A}\mathtt{H}_\mathtt{S})\,\mathtt{C}^*_\infty\,(\mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A}\mathtt{H}_\mathtt{S})^\top = (\mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A}) \left(\mathtt{H}_\mathtt{S}\mathtt{C}^*_\infty\mathtt{H}_\mathtt{S}^\top\right) \left(\mathtt{H}_\mathtt{A}^\top\mathtt{H}_\mathtt{P}^\top\right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathtt{KK}^\top & \mathtt{KK}^\top\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top\mathtt{KK}^\top & \mathbf{v}^\top\mathtt{KK}^\top\mathbf{v} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(Projektionen av) linjekägelsnittet $\mathtt{C}^*_\infty$ innehåller all information som behövs för en metrisk rektifiering, dvs. bestämning av affina och projektiva egenskaper.

Effekt av punkttransformation på $\mathtt{C}^*_\infty$

Antag vi har två linjer $\mathbf{l} = (1, 0, -1.3)^\top$ och $\mathbf{m} = (0, 1, -4.3)^\top$ och transformationen

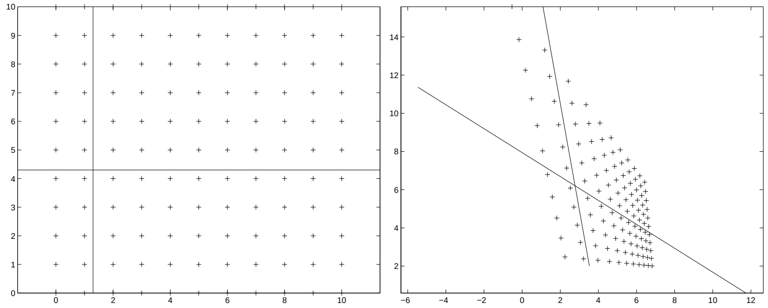
$$\begin{aligned} s &= 0.75, \; \mathtt{R} = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}, \; \mathtt{K} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v = 0.5, \text{ eller} \\ \mathtt{H} &= \mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A}\mathtt{H}_\mathtt{S} = \begin{bmatrix} 1.434 & -0.264 & 2.248 \\ 0.241 & 0.899 & 2.481 \\ 0.143 & -0.026 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Då blir

$$\mathbf{l}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -0.257 \\ -0.046 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{m}' = \mathtt{H}^{-\top}\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -0.079 \\ -0.126 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och

$$\mathtt{C}^{*\prime}_\infty = \mathtt{HC}^*_\infty\mathtt{H}^\top = \begin{bmatrix} 100 & 5.087 & 10 \\ 5.087 & 40.700 & 0.509 \\ 10 & 0.509 & 1 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{x}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$

Ortogonalitetsbestämning med $\mathtt{C}^*_\infty$

Om vi känner bilden av $\mathtt{C}^*_\infty$

$$\mathtt{C}^{*\prime}_\infty = \begin{bmatrix} 100 & 5.087 & 10 \\ 5.087 & 40.700 & 0.509 \\ 10 & 0.509 & 1 \end{bmatrix}$$

kan vi avgöra om linjerna

$$\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} -0.257 \\ -0.046 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{m}' = \begin{bmatrix} -0.079 \\ -0.126 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i bilden är ortogonala i "världsplanet",

$$\mathbf{l}'^\top \mathtt{C}^{*\prime}_\infty \mathbf{m} = \begin{bmatrix} -0.257 \\ -0.046 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 100 & 5.0874 & 10 \\ 5.0874 & 40.6995 & 0.5087 \\ 10 & 0.5087 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.079 \\ -0.126 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

Metrisk rektifiering med $\mathtt{C}^{*\prime}_\infty$

Givet $\mathtt{C}^{*\prime}_\infty$ kan vi beräkna de affina och projektiva egenskaperna $\mathtt{K}$ och $\mathbf{v}$ ur

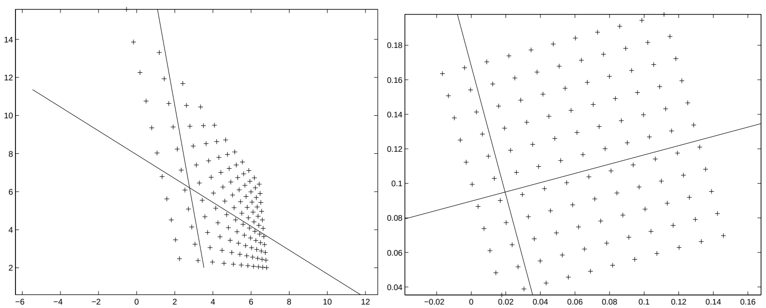
$$\mathtt{K}\mathtt{K}^\top = \begin{bmatrix} 100 & 5.0874 \\ 5.0874 & 40.6995 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathtt{K} = \begin{bmatrix} 9.9682 & 0.7975 \\ 0 & 6.3796 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

och

$$\mathtt{K}\mathtt{K}^\top \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.5087 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 100 & 5.0874 \\ 5.0874 & 40.6995 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 0.5087 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Metrisk rektifiering med $\mathtt{C}^*_\infty$

Givet $\mathtt{K}$ och $\mathbf{v}$ kan vi eliminera den affina och projektiva komponenten av transformationen genom att applicera $\mathtt{H}_\mathtt{M} = (\mathtt{H}_\mathtt{P}\mathtt{H}_\mathtt{A})^{-1}$ på punkterna och $\mathtt{H}_\mathtt{M}^{-\top}$ på linjerna.



$\mathbf{x}'$ $\qquad\qquad$ $\mathtt{H}_\mathtt{M}\mathbf{x}'$

Metrisk rektifiering med ortogonala linjer

Om en bild rektifierats affint behöver vi två ekvationer för att kunna bestämma de två frihetsgraderna i $\mathtt{K}$. Dessa ekvationer kan vi få från avbildade ortogonala linjer.

Antag $\mathbf{l}'$ och $\mathbf{m}'$ i den affint rektifierade bilden svarar mot två ortogonala linjer $\mathbf{l}$ och $\mathbf{m}$ i världsplanet. Eftersom $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har vi

$$\begin{bmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{KK}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ m'_3 \end{bmatrix} = 0$$

som är en linjär ekvation i

$$\mathtt{S} = \mathtt{KK}^\top = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix},$$

$$[l'_1 m'_1, l'_1 m'_2 + l'_2 m'_1, l'_2 m'_2]\, \mathbf{s} = 0,$$

där $\mathbf{s} = (s_{11}, s_{12}, s_{22})^\top$.

Givet bilden av två ortogonala linjepar kan vi bestämma $\mathbf{s}$ och därmed $\mathtt{K}$ och $\mathtt{H}_\mathtt{A}$ upp till okänd skala. Applikation av $\mathtt{H}_\mathtt{A}^{-1}$ på bilden rektifierar den metriskt.