Homogena koordinater i $\mathcal{R}^3$

En punkt $\mathbf{X}$ i $\mathcal{R}^3$ representeras av en 4-vektor. Den homogena vektorn $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^\top$ med $X_4 \neq 0$ motsvarar punkten $(X, Y, Z)^\top$ i $\mathcal{R}^3$ med

$$X = X_1/X_4,\ Y = X_2/X_4,\ Z = X_3/X_4.$$

3D-punkten $(X, Y, Z)^\top$ har homogen representation $\mathbf{X} = (X, Y, Z, 1)^\top$.

Homogena punkter med $X_4 = 0$ motsvarar oändlighetspunkter.

En projektiv transformation på $\mathcal{P}^3$ är en linjär transformation som opererar på homogena 4-vektorer och representeras av en icke-singulär 4×4-matris

$$\mathbf{X}' = \mathtt{H}\mathbf{X}.$$

Matrisen $\mathtt{H}$ har 16 element och 15 frihetsgrader.

En homografi i $\mathcal{P}^3$ avbildar linjer på linjer och bevarar skärningar mellan t.ex. linjer och plan.

Plan i $\mathcal{P}^3$

Ett plan i $\mathcal{R}^3$ kan skrivas som

$$\pi_1 X + \pi_2 Y + \pi_3 Z + \pi_4 = 0$$

och har homogen representation

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^\top$$

i $\mathcal{P}^3$.

Uttrycket $\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{X} = 0$ anger att punkten $\mathbf{X}$ ligger i planet $\boldsymbol{\pi}$ och att planet $\boldsymbol{\pi}$ skär punkten $\mathbf{X}$.

Tre punkter definierar ett plan

Antag vi har tre distinkta punkter $\mathbf{X}_i$ som ligger i planet $\boldsymbol{\pi}$. Då uppfyller varje punkt $\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{X}_i = 0, i = 1, \ldots, 3$ eller

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\top \\ \mathbf{X}_2^\top \\ \mathbf{X}_3^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}.$$

Planet $\boldsymbol{\pi}$ fås ur nollrummet.

Exempel: $\mathbf{X}_1 = (0, 0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{X}_2 = (1, 0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{X}_3 = (0, 1, 0, 1)^\top$. Planet genom dessa punkter fås ur

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\pi} = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller planet $Z = 0$.

Tre plan definierar en punkt

På samma sätt definierar tre distinkta plan $\boldsymbol{\pi}_i$ en punkt genom

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1^\top \\ \boldsymbol{\pi}_2^\top \\ \boldsymbol{\pi}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Exempel: $\boldsymbol{\pi}_1 = (1, 0, 0, -3)^\top$, $\boldsymbol{\pi}_2 = (1, 1, 0, -2)^\top$, $\boldsymbol{\pi}_3 = (0, 1, 1, 0)^\top$. Skärningen mellan de planen fås ur

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eller punkten $(X, Y, Z)^\top = (3, -1, 1)^\top$.

Plan och punkter är varandras dualer.

Transformation av planet

Under en punkttransformation $\mathbf{X}' = \mathtt{H}\mathbf{X}$ transformeras planet

$$\boldsymbol{\pi}' = \mathtt{H}^{-\top}\boldsymbol{\pi}.$$

Parameterisering av punkter i planet

Punkterna på ett plan $\boldsymbol{\pi}$ kan skrivas som

$$\mathbf{X} = \mathtt{M}\mathbf{x},$$

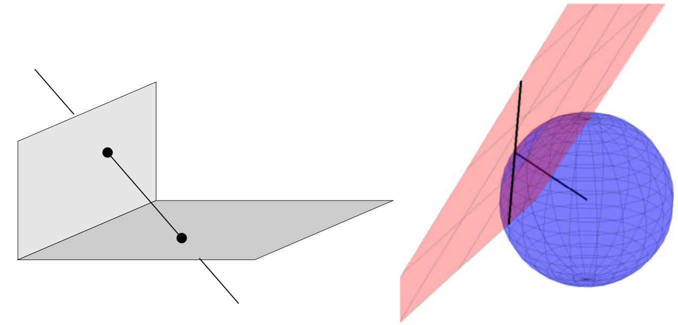
där kolumnerna i 4×3-matrisen $\mathtt{M}$ spänner upp det 3-dimensionella nollrummet till $\boldsymbol{\pi}^\top$, dvs. $\boldsymbol{\pi}^\top\mathtt{M} = \mathbf{0}$.

3-vektorn $\mathbf{x}$ är en punkt i $\mathbf{P}^2$ och parameteriserar alla punkter i planet π.

Linjer

En linje definieras som snittet av två plan eller som sammanbindningen (*join*) av två punkter.

En linje i $\mathcal{P}^3$ har 4 frihetsgrader, vilket kan tolkas som skärningen i två ortogonala plan eller kortaste avstånd till origo, latitud och longitud för tangeringspunkt samt vinkel i tangeringsplan.



Linjerepresentation

En linje kan representeras som värderummet av två vektorer. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två distinkta punkter i rummet. Linjen som sammanbinder punkterna representeras av en linjärkombination av dem. Låt

$$\mathtt{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix}.$$

Linjen kan också representeras som snittet av två plan. Låt $\mathbf{P}$ och $\mathbf{Q}$ vara två distinkta plan och

$$\mathtt{W}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^\top \\ \mathbf{Q}^\top \end{bmatrix}.$$

Då är

- värderummet till $\mathtt{W}^\top$ alla punkter $\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$ på linjen.
- nollrummet till $\mathtt{W}$ är planknippet med linjen som axel.
- värderummet till $\mathtt{W}^{*\top}$ är planknippet $\lambda'\mathbf{P} + \mu'\mathbf{Q}$ med linjen som axel.
- nollrummet till $\mathtt{W}^*$ är alla punkter på linjen.
- matriserna $\mathtt{W}$ och $\mathtt{W}^{*\top}$ samt $\mathtt{W}^*$ och $\mathtt{W}^\top$ spänner upp varandras nollrum, $\mathtt{W}\mathtt{W}^{*\top} = \mathtt{W}^*\mathtt{W}^\top = 0_{2\times 2}$.

Linjerepresentationerna $\mathtt{W}$ och $\mathtt{W}^*$ är varandras dualer.

Exempel

Ex: X-axeln kan representeras av

$$\mathtt{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathtt{W}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^\top \\ \mathbf{Q}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alla punkter på X-axeln kan beskrivas med

$$\mathbf{X} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

eller som alla punkter som ligger i planen $\mathbf{P} : Z = 0$ och $\mathbf{Q} : Y = 0$.

Värderum och snitt

Planet $\boldsymbol{\pi}$ som spänns upp av linjen $\mathtt{W}$ och punkten $\mathbf{X}$ fås ur nollrummet till

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} \mathtt{W} \\ \mathbf{X}^\top \end{bmatrix}.$$

Om nollrummet är 2-dimensionellt ligger punkten $\mathbf{X}$ på linjen $\mathtt{W}$ och planet är ej unikt.

Punkten $\mathbf{X}$ som är snittet mellan linjen $\mathtt{W}$ och planet $\boldsymbol{\pi}$ får ur nollrummet till

$$\mathtt{M}^* = \begin{bmatrix} \mathtt{W}^* \\ \boldsymbol{\pi}^\top \end{bmatrix}.$$

Om nollrummet är 2-dimensionellt ligger linjen $\mathtt{W}$ på planet $\boldsymbol{\pi}$ och punkten är ej unik.

Andragradsytor

En (punkt-)andragradsyta (*quadric*) i $\mathcal{P}^3$ definieras av ekvationen

$$\mathbf{X}^\top \mathtt{Q} \mathbf{X} = 0,$$

där $\mathtt{Q}$ är en symmetrisk 4×4-matris och har 9 frihetsgrader (homogen symmetrisk $4\times$-matris).

Snittet mellan en andragradsyta $\mathtt{Q}$ och ett plan $\boldsymbol{\pi}$ är ett kägelsnitt $\mathtt{C}$. Om $\mathtt{M}$ är nollrumsmatris till $\boldsymbol{\pi}$ kan alla punkter i planet skrivas $\mathbf{X} = \mathtt{M}\mathbf{x}$. Punkter på $\boldsymbol{\pi}$ är på $\mathtt{Q}$ om

$$\mathbf{X}^\top \mathtt{Q} \mathbf{X} = \mathbf{x}^\top \underbrace{\mathtt{M}^\top \mathtt{Q} \mathtt{M}}_{\mathtt{C}} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathtt{C} \mathbf{x} = 0$$

som ligger på kägelsnittet $\mathtt{C} = \mathtt{M}^\top \mathtt{Q} \mathtt{M}$ i planet $\boldsymbol{\pi}$.

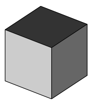
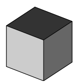
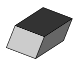
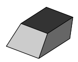
Dualen till en punktandragradsyta är en planandragradsyta. Duala andragradsytor är ekvationer för plan: tangentplanet $\boldsymbol{\pi}$ till punktandragradsytan $\mathtt{Q}$ uppfyller $\boldsymbol{\pi}^\top \mathtt{Q}^* \boldsymbol{\pi} = 0$, där $\mathtt{Q}^*$ är den adjungerade matrisen till $\mathtt{Q}$ ($\mathtt{Q}^* = \mathtt{Q}^{-1}$ om $\mathtt{Q}$ är inverterbar).

Under en punkttransformation $\mathbf{X}' = \mathtt{H}\mathbf{X}$ transformeras andragradsytorna som

$$\mathtt{Q}' = \mathtt{H}^{-\top} \mathtt{Q} \mathtt{H}^{-1} \text{ och } \mathtt{Q}^{*\prime} = \mathtt{H} \mathtt{Q}^* \mathtt{H}^\top.$$

Transformationshierarki för $\mathcal{P}^3$

Transformationshierarkin för homografier i $\mathcal{P}^3$ är

Euklidisk 6 frihetsgrader	$\begin{bmatrix} \mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$		volym
Similär 7 frihetsgrader	$\begin{bmatrix} s\mathtt{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$		det absoluta kägelsnittet Ω_∞
Affin 12 frihetsgrader	$\begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$		parallellitet, oändlighetsplanet $\boldsymbol{\pi}_\infty$
Projektiv 15 frihetsgrader	$\begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix}$		kontaktpunkter

där matrisen $\mathtt{A}$ är en inverterbar 3×3-matris, $\mathtt{R}$ är en 3D rotationsmatris, $\mathbf{t}$ är en 3-translationsvektor, $\mathbf{v}$ är en 3-vektor, v är en skalär, och $\mathbf{0} = (0,0,0)^\top$.

Oändlighetsplanet

Oändlighetsplanet $\boldsymbol{\pi}_\infty$ har kanonisk form $\pi_\infty = (0,0,0,1)^\top$ och innehåller alla riktningar $\mathbf{D} = (X_1, X_2, X_3, 0)^\top$ i $\mathcal{P}^3$.

Två plan är parallella omm deras skärningslinje ligger på $\boldsymbol{\pi}_\infty$.

En linje är parallell med ett plan eller en linje om deras skärning ligger på $\boldsymbol{\pi}_\infty$.

Oändlighetsplanet är fixerat under en affin transformation.

Det absolut kägelsnittet Ω_∞

Det absoluta kägelsnittet Ω_∞ är ett punktkägelsnitt på $\boldsymbol{\pi}_\infty$. Punkter på Ω_∞ uppfyller

$$\left.\begin{array}{r} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ X_4 \end{array}\right\} = 0$$

och beskriver en relation mellan riktningar i $\mathcal{P}^3$, dvs. punkter med $X_4 = 0$:

$$(X_1, X_2, X_3)\mathtt{I}(X_1, X_2, X_3)^\top = 0.$$

Alla sfärer skär $\boldsymbol{\pi}_\infty$ på Ω_∞.

Metriska egenskaper för Ω_∞

Om $\boldsymbol{\pi}_\infty$ och Ω_∞ är kända är det möjligt att beräkna vinklar mellan linjer.

Låt $(\mathbf{d}_1^\top, 0)^\top$ och $(\mathbf{d}_2^\top, 0)^\top$ vara riktningar i $\mathcal{P}^3$. Vinkeln θ mellan $\mathbf{d}_1$ och $\mathbf{d}_2$ bestäms av

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^\top \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^\top \mathbf{d}_2)}}$$

vilket kan skrivas

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{d}_1^\top \Omega_\infty \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^\top \Omega_\infty \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^\top \Omega_\infty \mathbf{d}_2)}}$$

Det betyder att om projektionen Ω'_∞ av Ω_∞ är känd kan vi avgöra om två projicerade linjer $\mathbf{d}'_1$ och $\mathbf{d}'_2$ är ortogonala.

Den absoluta duala andragradsytan $\mathtt{Q}^*_\infty$

Den absoluta duala andragradsytan $\mathtt{Q}^*_\infty$ representeras av en 4×4 homogen matris av rang 3

$$\mathtt{Q}^*_\infty = \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}.$$

Vinkeln θ mellan två plan $\boldsymbol{\pi}_1$ och $\boldsymbol{\pi}_2$ är

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\pi}_1^\top \mathtt{Q}^*_\infty \boldsymbol{\pi}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\pi}_1^\top \mathtt{Q}^*_\infty \boldsymbol{\pi}_1)(\boldsymbol{\pi}_2^\top \mathtt{Q}^*_\infty \boldsymbol{\pi}_2)}}.$$

Om projektionen $\mathtt{Q}^{*\prime}_\infty$ är känd kan vi avgöra om två projicerade plan $\boldsymbol{\pi}'_1$ och $\boldsymbol{\pi}'_2$ är ortogonala.

Metriska egenskaper hos $\mathtt{Q}^*_\infty$

$\mathtt{Q}^*_\infty$ bevaras endast av en similaritetstransformation. Under en generell homografi

$$\mathtt{H} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & k \end{bmatrix}$$

avbildas $\mathtt{Q}^*_\infty = \mathtt{H}\mathtt{Q}^*_\infty\mathtt{H}^\top$, dvs.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{A}^\top & \mathbf{v} \\ \mathbf{t}^\top & k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathtt{A}\mathtt{A}^\top & \mathtt{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{t}^\top\mathtt{A}^\top & \mathbf{v}^\top\mathbf{v} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

som ska vara lika upp till skala. Det gäller bara för $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $\mathtt{A}$ en skalad ortogonal matris, dvs. för en similaritet.

Oändlighetsplanet $\boldsymbol{\pi}_\infty$ är en nollvektor till $\mathtt{Q}^*_\infty$.